

$\text{rk}(A) =$ ordine massimo di un minore
quadrato di A con $\det \neq 0$ $A \in \mathbb{K}^{m,n}$

$$\text{rk}(A) = \underline{\dim \mathcal{L}_c(A)} = \dim \mathcal{L}_r(A)$$

$$\text{rk}(A) = \text{rk}(f_A)$$

$$f_A: \begin{cases} \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m \\ X \mapsto AX \end{cases}$$

$$\text{Ker}(A) = \{X \in \mathbb{K}^n : AX = 0\} = \text{Ker } f_A$$

$$\dim(\text{Ker}(A)) = \dim \text{Ker}(A).$$

$\text{rk}(A) = k \Leftrightarrow \exists$ un minore $M \in \mathbb{K}^{k,k}$ con $\det(M) \neq 0$
ed ogni minore $M' \in \mathbb{K}^{i,i}$ con $i > k$
ha $\det M' = 0$

OSS: Se in una matrice A tutti i minori di ordine r hanno $\det = 0 \Rightarrow \forall h \geq t$, tutti i minori di ordine h hanno $\det = 0$.

$\text{rk}(A) = k \Leftrightarrow \exists$ un minore $M \in \mathbb{K}^{k \times k}$ con $\det(M) \neq 0$
ed ogni minore $M' \in \mathbb{K}^{k+1, k+1}$ ha $\det M' = 0$.

Teorema degli orlati: Una matrice A ha rango k

$\Leftrightarrow$ es. contiene un minore $M \in \mathbb{K}^{k \times k}$ con $\det(M) \neq 0$ ed ogni minore $M'(k+1) \times (k+1)$ che contiene M ha $\det(M') = 0$.

$\forall M'$ di ordine $(k+1) \times (k+1)$ che contiene M è detto orlato di M .

DIM: Se $\text{rk}(A) = k \Rightarrow$ ogni minore $(k+1) \times (k+1)$ ha $\det = 0$
 $\exists M \in K^{k \times k}$ con $\Rightarrow$ anche ogni orlo di M minore
 $\det(M) \neq 0$ $k \times k$ con $\det(M) \neq 0$ ha $\det = 0$.

Viceversa

mostriamo che se $\text{rk}(A) > k \Rightarrow \exists$ un orlo M' di M
 con $\det(M') \neq 0$.
 $\rightarrow$ DA QUESTO SEGUE CHE ~~$\text{rk}(M) = k$~~ $\forall$ orlo M' di M
 ha $\det(M') = 0 \Rightarrow \text{rk}(A) \leq k \Rightarrow \text{rk}(A) = k$.

$$\text{rk}(A) > k \Rightarrow \text{rk}(A) \geq k+1$$

Sia M un minore di A con $\det(M) \neq 0$ e

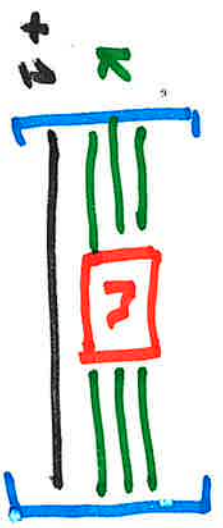
$$M \in K^{k \times k} \Rightarrow \text{le righe di } A \text{ intersezione da}$$

M non linearmente indipendenti ma $\dim \text{Im}(A) >$

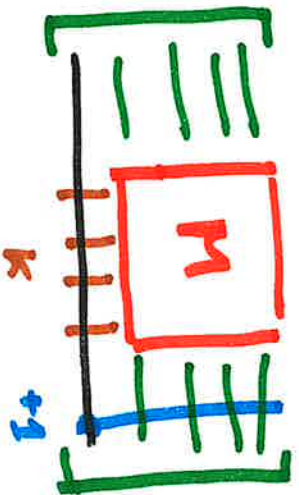
$$> k+1 \Rightarrow \exists \text{ almeno un'altra}$$

riga in A indep. rispetto alle

intersezione da M .



pongo $A' =$ minore di A formato dalle k righe
interceltate da M più ~~la~~ riga indipendente
sella prima $A' \in \mathbb{K}^{k+1, n}$



$$\text{rk}(A') = \dim \mathcal{L}_R(A') = k+1 \\ = \dim \mathcal{L}_C(A').$$

osserviamo che le k colonne interceltate da M
in A' sono linearmente indipendenti $\Rightarrow$
 $\exists$ necessariamente una ulteriore colonna in A' che
è indipendente rispetto a queste.

Sia M' il minore $(k+1) \times (k+1)$ ottenuto aggiungendo
tale colonna alle colonne di A' interceltate da M .

Le colonne di M' sono una base di $L_c(A')$

$\Rightarrow \det M' \neq 0$ e M' è una minore $(k+1) \times (k+1)$ di M .

□

$\Rightarrow \exists$ orlo M' di M con $\det M' \neq 0 \Leftrightarrow \text{rk}(A) > k$

~~Se $\det M' = 0 \Rightarrow \text{rk}(A) = k$.~~

CALCOLO RANGO.

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Sì} \Rightarrow \text{rk}(A) = 0$ fine

$\rightarrow \text{No } i \in A$

$M \leftarrow$ minore $i \times i$ con $\det M \neq 0$.

$\rightarrow$ Verifico M' di M da

$\det(M') = 0 \rightarrow \text{rk}(A) = i$

~~Se $M \leftarrow M'$ con $\det(M') \neq 0$~~

$i \leftarrow i+1$

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 5 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 8 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

Def: Si dice risolvens lineare di m equazioni in n incognite ammissi nel campo K un insieme di equazioni del tipo

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$\vdots$

$$a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

ove $a_{ij}, b_i \in K$, $x_1 \dots x_n$ sono simboli.

Si dice che un vettore $\lambda = (\lambda_1 \dots \lambda_n) \in K^n$ è soluzione dell'equazione

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = b_i$$

x e solo x

$$a_{i1}\lambda_1 + \dots + a_{in}\lambda_n = b_i.$$

Si dice che $\lambda = (\lambda_1 \dots \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ è soluzione di un sistema lineare

$$(*) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

se esso risolve contemporaneamente tutte le equazioni.

Un sistema lineare $(*)$ è compatibile $\Leftrightarrow$ esso ammette soluzioni.

INCOMPATIBILE

$$0 \quad \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases} \text{ non è compatibile.}$$

COMPATIBILE

$$1 \quad \begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \text{ è compatibile} \\ (x, y) = (0, 0).$$

$$1 | \mathbb{K} | \quad \begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases} \text{ è compatibile} \\ (x, y) = (t, 1-t)$$

$t \in \mathbb{K}$.

$$(*) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$(*)' \quad AX = B$$

cosa significa dire $(*)'$ risolvibile.

$$f_A \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m \\ x \mapsto Ax \end{array} \right.$$

$$f_A(x) = B$$

chiamo secondo AX tale che esso sia immagine di B secondo l'applicazione lineare f_A .

B ammette preimmagine $\Leftrightarrow B \in \text{Im}(f_A)$.

MA $\text{Im}(f_A)$ è generato dalle colonne di A

$$A = [c_1 \dots c_n]$$

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 c_1 + \dots + x_n c_n$$

$$\Rightarrow \text{Im}(f_A) = \mathcal{L}(c_1 \dots c_n).$$

Il sistema $AX = B$ ammette soluzione $\Leftrightarrow$

$$B \in \mathcal{L}_c(A) \Leftrightarrow \mathcal{L}_c(A) + \mathcal{L}(B) = \mathcal{L}_c(A).$$

Osserviamo che $\mathcal{L}_c(A) + \mathcal{L}(B)$ è generato da $(c_1 \dots c_n, B)$
 $\mathcal{L}_c(A)$ è generato da $(c_1 \dots c_n)$.

$$R \in L_C(A) \Leftrightarrow \dim L(C_1 \dots C_n R) = \dim L(C_1 \dots C_n).$$

chiamo $(A|B)$ = matrice composta del
 sistema = la matrice
 le cui colonne sono $E_1 \dots E_n R$
 A = matrice incompleta del
 sistema.

$$\dim L(C_1 \dots C_n R) = \text{rk}(A|B)$$

$$\dim L(C_1 \dots C_n) = \text{rk}(A).$$

Teorema (Rouché-Capelli): $AX = R$ è compatibile
 $\Leftrightarrow \text{rk}(A) = \text{rk}(A|B).$

$AX=B$ compatibile $\Leftrightarrow f_A(x)=B$ ha soluzione

$$\Leftrightarrow B \in \text{Im } f_A \Leftrightarrow B \in L_c(A)$$

$$\Leftrightarrow L_c(A) + L(B) = L_c(A)$$

$$\Leftrightarrow \dim(L_c(A) + L(B)) = \dim L_c(A)$$

$$\Leftrightarrow \text{rk}(A|B) = \text{rk}(A) \quad \square$$

Supponiamo $AX=B$ compatibile $\Rightarrow$ quante soluzioni ha?

Le soluzioni di $AX=B$ sono le preimmagini di B secondo f_A . In particolare le preimmagini di B (ne esistono) sono in corrispondenza biunivoca con gli elementi di $\text{Ker } f_A = \text{Ker } A$.

Infatti se $Z \in \text{Ker}(A) \Rightarrow A(X+Z) = AX + AZ = AX$
quindi se $\bar{X}$ soluzione di $AX = B$

$$\Rightarrow A(\bar{X} + Z) = A\bar{X} + 0 = A\bar{X} = B$$

viceversa: se $\bar{X}, \bar{X}'$ due soluzioni di

$$AX = B \Rightarrow A\bar{X} = B = A\bar{X}' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A\bar{X}' - A\bar{X} = 0 \Rightarrow$$

$$A(\bar{X}' - \bar{X}) = 0 \Rightarrow \underline{\bar{X}' \in \bar{X} + \text{Ker } A.}$$

risposta: diciamo che le soluzioni sono
 ∞ dim $\text{Ker } A$

ove con questa notazione si intende che esse
dipendono da dim $\text{Ker } A$ parametri.

Infatti, se X_0 è una soluzione particolare di $AX=B$ e $(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_e)$ è una base di $\ker A \Rightarrow$ tutte e sole le soluzioni di $AX=B$ si scrivono come elementi di

$$X_0 + \ker A = X_0 + L(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_e)$$

e quindi sono del tipo

$$\{ (X_0 + \alpha_1 \bar{v}_1 + \dots + \alpha_e \bar{v}_e) \mid \alpha_i \in K \}$$

$$\dim \ker A + \overset{\text{numero}}{\text{indeterminate}} \dim \text{Im } A = n$$

$$\dim \ker A + r_k(A) = n \Rightarrow \underline{\dim \ker A = n - r_k(A)}$$

$$ax=b$$

$$a, b \in \mathbb{K}$$

$$A = (a) \quad B = (b)$$

$$x = [x]$$

$$(a, b) = (0, 0)$$

$$\text{rk}(A) = \text{rk}(A|B) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{K} \quad \infty^1$$

$$(a, b) = (0, \neq 0)$$

$$\text{rk}(A) = 0 \quad \text{rk}(A|B) = 1 \quad \nexists \text{ sol.} \quad \emptyset.$$

$$(a, b) \text{ con } a \neq 0 \Rightarrow \exists \tilde{a}^{-1} \in \mathbb{K} \Rightarrow$$

$$\tilde{a}^{-1} a x = \tilde{a}^{-1} b$$

$$\exists! \text{ soluzione.}$$

$$x = \tilde{a}^{-1} b$$

$$\text{rk}(A) = 1 = \text{rk}(A|B).$$

Def: Un sistema lineare di m equazioni in m incognite $AX=B$ è detto di Cramer se $\det(A) \neq 0$

Teorema: Sia $AX=B$ un sistema di Cramer $\Rightarrow x = A^{-1}B$ è la sua unica soluzione.

Def: $\det(A) \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1} \in GL(n, \mathbb{K})$

$$\Rightarrow A^{-1}(Ax) = A^{-1}B$$

$$(A^{-1}A)x = A^{-1}B$$

$$x = A^{-1}B. \quad \square$$

! BA^{-1} non è nemmeno un vettore!!

$\begin{bmatrix} \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \end{bmatrix}$ non si può calcolare.

Def: Un sistema lineare $AX=B$ è detto omogeneo se $B=0$

$\rightarrow$ Soluzioni di $AX=0 = \ker(A)$.

oss: L'insieme delle soluzioni di $AX=B$ è un sottospazio di $\mathbb{K}^n$

$$\Leftrightarrow B = \underline{0}.$$

$$\text{Se } B = \underline{0} \Rightarrow \text{Soluções}(AX = \underline{0}) = \ker(A) \subseteq \mathbb{K}^n$$

Se $B \neq \underline{0} \Rightarrow \underline{0} \notin \text{Soluções}(AX = B) \Rightarrow$ não
pode haver as soluções
nessa equação.

oss: Um sistema linear homogêneo é sempre compatível!

$\underline{0} \in \ker A$ sempre!

Def: Se $AX = \underline{0}$ um sistema linear homogêneo.

Se diz solução de $AX = \underline{0}$ ogni $X' \neq \underline{0}$
com $X' \in \ker A$.

Def: Dois sistemas lineares $AX = B$ e $A'X = B'$
são ditos equivalentes se hanno a mesma solução.

oss: Sia $AX = B$ un sistema lineare di m eq. in n incognite.

Si dice sistema omogeneo associato il sistema lineare $AX = \underline{0}$

Si dice omogeneizzazione del sistema il sistema

$$(A|B) \begin{bmatrix} X \\ x_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{0} \end{bmatrix}$$

↑ sistema omogeneo le cui soluzioni con $x_0 = -1$ corrispondono alle soluzioni di $AX = B$

$$(A | B) \begin{bmatrix} X \\ x_0 \end{bmatrix} = \underline{0}$$

via $(\bar{x}_1 \dots \bar{x}_n \bar{x}_0)$ una soluzione di $(A | B) \begin{bmatrix} X \\ x_0 \end{bmatrix} = \underline{0}$

$\Rightarrow (-1) \left(\frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_0} \dots \frac{\bar{x}_n}{\bar{x}_0} \right)$ con $\bar{x}_0 \neq 0$ è soluzione
d: $AX = B.$

$$A \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{bmatrix} + \bar{x}_0 B = \underline{0} \Rightarrow A \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{bmatrix} = -\bar{x}_0 B$$

$$\text{se } \bar{x}_0 \neq 0 \Rightarrow +A \begin{bmatrix} -\bar{x}_1 \bar{x}_0^{-1} \\ \vdots \\ -\bar{x}_n \bar{x}_0^{-1} \end{bmatrix} = B$$

DATA SOLVERE $\bar{X} B$ $AX = B \Rightarrow \begin{bmatrix} \bar{X} \\ -I \end{bmatrix}$ è sol.

$$\text{di } (A|B) \begin{bmatrix} \bar{X} \\ x_0 \end{bmatrix} = \underline{0}$$

CI INTERESSA VEDERE COME RISOLVERE SISTEMI LINEARI
OMOGENEI

OSS: enologo delle trasformazioni algebriche della
matrice $(A|B)$ che portano a sistemi
lineari equivalenti.

~~$(A|B) \bar{X}$~~

$$(A|B) \bar{X} = \underline{0}$$

$$(\hat{A}|\hat{B}) \tilde{X} = \underline{0}$$

$$A'X = \underline{0}$$

Trasformazioni elementari

- 1) permutare le righe di A
- 2) moltiplicare una riga per uno scalare $\neq 0$
- 3) sommare ad una riga un'altra. (ovvero sommare ad una riga un moltiplo di un'altra).

→ NON CAMBIARE L'INSIEME DELLE SOLUZIONI.

Teorema: Date le trasf. elementari di cui sopra è sempre possibile

ridurre A' in forma RREF

Row Reduced

ECHELON FORM.

ovvero in forma a scalini ridotti per righe.

$$A' = \begin{bmatrix} \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} \\ \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{0} \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{0} \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{1} \end{bmatrix}$$

- 1) ~~ogni~~ La prima entrata non nulla di ogni riga è 1
- 2) nella colonna che contiene una prima entrata di riga diversa da 0 c'è un'unica entrata non nulla.
- 3) Se $i > j$ allora la prima entrata non nulla della riga i -esima è a dx della prima entrata non nulla della riga j .

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 5 & 9 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & 9 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

primus eufrika di
niga nou walla = primus.

algoritmo

$$\begin{array}{c} A \quad | \quad B \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{array}$$

$\uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow$
 $x_2 \quad x_1 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad x_0$

$x_0 = -1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

DIP.
parametri

$$\begin{aligned} x_1 &= -3x_3 - x_5 \\ x_2 &= -2x_3 + 1 \\ x_4 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} = -x_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} - x_5 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

soluzione particolare $\rightarrow$

$$\begin{aligned} x_3 &= 0 & x_4 &= 0 \\ x_5 &= 0 & \Rightarrow x_1 &= 1 \\ & & x_2 &= 0 \end{aligned}$$

PARTICOLARE $\rightarrow (0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0)$

OMOGENEO

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3x_3 - x_5 \\ -2x_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3x_3 - x_5 \\ -2x_3 \\ x_3 \\ 0 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

$$= -x_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-x_5 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$S = (01000) +$$

$$D((32-100), (10004))$$

Key A